

УДК 532.546

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КАПИЛЛЯРНОГО ПОДЪЕМА МЕНИСКА НА ТОНКОМ ФИГУРНОМ ВОЛОКНЕ

М.М. Алимов, К.Г. Корнев

Аннотация

С использованием метода сращивания асимптотических разложений проблема капиллярного подъема на фигурном волокне сведена к нелинейной проблеме определения минимальной поверхности со специфическими граничными условиями на профиле волокна и в бесконечности. Предложенная формулировка позволяет интерпретировать проблему нахождения формы внешнего мениска, как задачу фильтрации аномально вязкой жидкости, и эффективно использовать преобразование Чаплыгина к переменным годографа скорости. В качестве примера приведено точное решение в асимптотической постановке задачи капиллярного подъема на волокне с овальным профилем поперечного сечения. Показано, что даже для гладкого профиля волокна на контактной линии могут образоваться сингулярности, если кривизна профиля в отдельных его точках обращается в бесконечность.

Ключевые слова: капиллярный подъем, минимальные поверхности, сращивание асимптотических разложений, преобразование годографа, комплексная переменная.

1. Введение.

Если волокно опустить в жидкость перпендикулярно ее свободной поверхности, то поверхность жидкости искривится, образуя внешний мениск, охватывающий волокно. В зависимости от того, насколько жидкость смачивает материал волокна, контактная линия, разделяющая сухую и смоченную части поверхности волокна, может располагаться выше (для смачивающей жидкости) или ниже (для несмачивающей жидкости) горизонтальной свободной поверхности жидкости. Для полого волокна или трубки эффект капиллярного подъема поверхности жидкости еще более заметен. James Jurin [1] впервые описал эксперимент с таким капиллярным подъемом, что вызвало интерес к этой теме со стороны таких выдающихся ученых, как Laplace, Poisson, Gauss, and Young и в результате привело к формированию современной теории капиллярности [2-4].

Оказалось, что высота подъема жидкости и форма мениска сильно зависят от поверхностных свойств волокна [5-9]. Поэтому эксперимент по методике Jurin с последующим анализом формы мениска и высоты подъема жидкости стал одним из наиболее распространенных способов получения характеристик поверхности волокон [6, 9-13]. Если мениски, образующиеся на волокнах круглого сечения, изучены хорошо [3,5,6,9,14-17], то менискам, образующимся на волокнах некруглого сечения, было уделено гораздо меньше внимания [13,15,18-22]. Во многих случаях о характере взаимодействия между жидкостью и волокном судят по поведению контактной линии [5]. С появлением гофрированных волокон, а также нановолокон [23-30] возрастает роль правильной оценки влияния формы волокна на формирование сингулярностей контактной линии, а также на конфигурацию мениска в целом [31-33]. Эффективность и обоснованность таких оценок может быть обеспечена

только привлечением и развитием методов математического анализа нелинейного уравнения капиллярности с нелинейными граничными условиями.

В этой работе сформулирована проблема определения формы внешнего мениска в случае, когда волокно – тонкое, и гравитация играет вторичную роль в формировании профиля мениска. Количественно это равносильно предположению о том, что число Бонда мало. Это число определяется, как $\varepsilon = L_m^2/L_c^2 \ll 1$, где $L_c = \sqrt{\sigma/(\rho g)}$ – капиллярная длина, σ – поверхностное натяжение жидкости, ρ – ее плотность, g – ускорение свободного падения; L_m – характерный размер профиля волокна, например, его средний радиус $L_m = \sqrt{A/\pi}$, заданный посредством площади A его профиля.

С использованием метода сращивания асимптотических разложений [34,35] проблема определения формы внешнего мениска сведена к нахождению некоторой минимальной поверхности при специфических граничных условиях. Такая формулировка позволяет использовать хорошо развитые методы динамики жидкости и комплексного переменного. Установлена математическая аналогия нелинейных уравнений минимальной поверхности с уравнениями для газа Чаплыгина [36-39] или уравнениями фильтрации неьютоновской жидкости в пористых средах [40-42], что позволяет использовать преобразование Чаплыгина к переменным годографа. Эффективность такого подхода продемонстрирована на задаче определения формы мениска на волокне с овальным профилем поперечного сечения.

1.1. Математическая модель. В декартовой системе координат (X, Y, Z) уравнение мениска: $Z = H(X, Y)$ характеризует подъем жидкости относительно горизонтальной плоскости (X, Y) , которая совпадает с уровнем жидкости на бесконечном удалении от волокна. Конфигурация мениска устанавливается согласно капиллярному закону Лапласа [2,43]: $\sigma(1/R_1 + 1/R_2) - \rho g H = 0$, где первый член уравнения – средняя кривизна, определяемая двумя главными радиусами кривизны R_1 и R_2 ; второй член представляет собой гидростатическое давление. В общем случае средняя кривизна поверхности может быть представлена в виде нелинейного дифференциального оператора от функции $H(X, Y)$ и, соответственно, закон Лапласа принимает вид [15,44]:

$$\sigma \nabla \cdot \left[(1 + |\nabla H|^2)^{-1/2} \nabla H \right] - \rho g H = 0, \quad (1)$$

где $\nabla = (\partial/\partial X, \partial/\partial Y)$ – 2D оператор градиента.

На бесконечности жидкость имеет нулевой уровень:

$$\sqrt{X^2 + Y^2} \rightarrow \infty : \quad H = 0. \quad (2)$$

Граничное условие на поверхности волокна. В экспериментах по капиллярному подъему конфигурация и положение контактной линии Γ_c заранее неизвестны. Математически контактная линия Γ_c описывается граничными значениями функции $H(X, Y)$, определенной на границе области Ω физической плоскости. Поскольку контактная линия принадлежит поверхности волокна, ее проекция на плоскость (X, Y) в точности совпадает с контуром Γ поперечного сечения волокна, рис. 1 б).

Согласно условию Юнга – Лапласа поверхность мениска должна подходить к поверхности волокна так, чтобы образовался краевой угол γ ; этот краевой угол, характеризующий комплекс из трех сред жидкость/воздух/волокно предполагается постоянным, что равносильно предположению о том, что поверхность волокна – ровная, гладкая и химически однородная [2,5,45]. Для волокна произвольного профиля Γ это физическое условие записывается в виде

$$\Gamma : \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} = \cos \gamma, \quad (3)$$

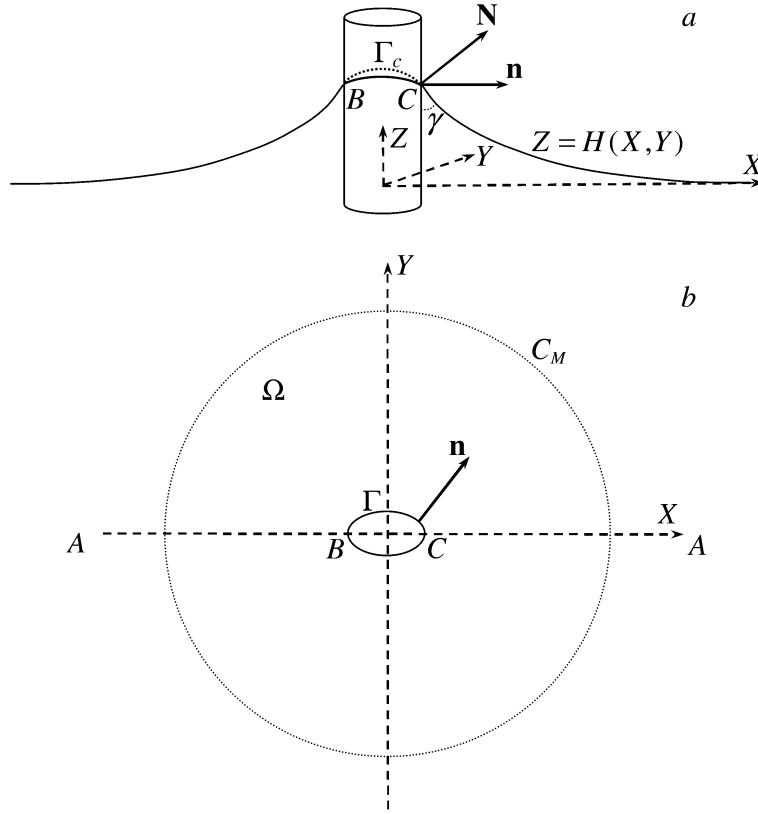


Рис. 1. а) Внешний мениск на волокне; б) проекция профиля мениска на плоскость (X, Y) . Проекция контактной линии Γ_c точно совпадает с контуром профиля волокна Γ

где $\mathbf{n} = (n_x, n_y, 0)$ – вектор нормали к контуру волокна Γ , а \mathbf{N} – вектор нормали к поверхности мениска. Оба вектора приложены к точке $(X, Y, Z) \in \Gamma$ и направлены в сторону воздуха. Вектор \mathbf{N} может быть выражен в терминах функции $H(X, Y)$, описывающей профиль мениска [46,47]

$$\mathbf{N} = (1 + |\nabla H|^2)^{-1/2} \left(-\frac{\partial H}{\partial X}, -\frac{\partial H}{\partial Y}, 1 \right).$$

Тогда условие Юнга – Лапласа принимает вид

$$\Gamma : (1 + |\nabla H|^2)^{-1/2} \left(\frac{\partial H}{\partial X} n_x + \frac{\partial H}{\partial Y} n_y \right) = -\cos \gamma. \quad (4)$$

1.2. Анализ размерностей. Инспекционный анализ уравнения (1) выявляет два характерных размера длины, связанных с этой проблемой. Один является капиллярной длиной L_c , другой связан размером поперечного сечения волокна. Число Бонда

$$\varepsilon = \frac{L_m^2}{L_c^2} = \frac{\rho g A}{\pi \sigma}$$

устанавливает соотношение между гравитационными силами и капиллярными. Если волокно тонкое, то имеет место неравенство $\varepsilon \ll 1$, и, следовательно, форма

мениска контролируется преимущественно капиллярными силами, а гравитационные силы играют вторичную роль. Например, для мениска воды на человеческом волосе, имеющим радиус $30 \mu m$ число Бонда оценивается, как $\varepsilon \approx 10^{-4}$. Размеры органов питания насекомых, например, толщина хоботка бабочек и молей, варьируется от нескольких микрон до сотен микрон. Для этих натуральных волокон число Бонда всегда мало [48-50].

Вводя безразмерные переменные $(X, Y) \rightarrow (X/L_m, Y/L_m) = (x, y)$ и безразмерную функцию высоты столба жидкости $h = H/L_m$, мы можем переписать систему уравнений (1), (2), (4) в безразмерном виде

$$\Omega : \quad \nabla \cdot \left[(1 + |\nabla h|^2)^{-1/2} \nabla h \right] - \varepsilon h = 0, \quad (5)$$

$$\Gamma : \quad (1 + |\nabla h|^2)^{-1/2} \frac{\partial h}{\partial n} = -\cos \gamma, \quad (6)$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty : \quad h \rightarrow 0. \quad (7)$$

Здесь область Ω – есть проекция на плоскость (x, y) области, занятой жидкостью. Как следствие имеет место условие баланса капиллярных и гравитационных сил в целом [51]

$$\varepsilon \iint_{\Omega} h d\Omega = l \cos \gamma, \quad (8)$$

где l – безразмерный периметр волокна. Последнее обстоятельство широко используется в экспериментах по материаловедению, поскольку силу натяжения между волокном и жидкостью можно измерить непосредственно [5-8].

2. Внешний мениск как минимальная поверхность

Мы будем использовать метод сращиваемых асимптотических разложений [14,16,34,35], следуя главным образом идеям [16]. Ло использовала мениск на круглом цилиндре, чтобы проиллюстрировать строгую процедуру сращивания [16]. Обобщим эти идеи на случай волокна произвольной формы поперечного сечения и сформулируем математическую модель, описывающую форму мениска в главном члене асимптотического разложения. Согласно этому методу, асимптотическое разложение решения задачи (5) – (7) по малым ε строится с использованием процедуры сращивания асимптотических разложений – внутреннего и внешнего. Внутреннее разложение описывает профиль мениска вблизи волокна, в то время, как внешнее разложение описывает профиль мениска вдали от волокна, где он близок к горизонтальной плоскости. Каждое из этих разложений содержит неизвестные константы, которые будут связаны между собой сращиванием разложений в промежуточной зоне, где разложения перекрываются.

Отметим, что в [16] рассматривалась одномерная задача и процедура сращивания существенно использовала свойства точного решения задачи – катеноида Максвелла [3]. Поэтому даже не понадобилось вводить условие баланса сил (8). Если попытаться непосредственно следовать методике [16] в двумерном случае, когда волокно имеет сложный профиль поперечного сечения, а число Бонда мало, то приходим к двумерному нелинейному уравнению в частных производных, описывающему минимальную поверхность. Поскольку это уравнение не имеет аналитического решения, следовать далее методике [16] проблематично. К счастью, в этом двумерном случае удастся отдельно построить внешнее асимптотическое разложение решения задачи и использовать уравнение (8) для определения констант

интегрирования прежде, чем приступить к построению внутреннего разложения, т. е. к решению двумерного нелинейного уравнения в частных производных, описывающего минимальную поверхность. Таким образом, использование уравнения (8) позволит срастить внутренне разложение с внешним по сути еще до построения решения задачи внутреннего асимптотического разложения.

2.1. Главный член внутреннего разложения. Вблизи к поверхности волокна переменные (x, y) и высота мениска имеют порядок единицы: $x, y \sim O(1)$, $h(x, y) \sim O(1)$. Поэтому будем искать асимптотическое решение внутренней задачи в виде разложения

$$x, y \sim O(1) : \quad h^i(x, y) = h^{i,0}(x, y) + o(1) \quad (9)$$

где верхний индекс “ i ” обозначает внутреннее разложение, а индекс “0” – главный член асимптотики. Отметим, что зона действия внутреннего разложения не включает ни бесконечность, ни окрестность нуля, занятую профилем волокна.

Выделяя члены порядка $O(1)$ в управляющем уравнении (5), будем иметь

$$\Omega : \quad \nabla \cdot \left[(1 + |\nabla h^{i,0}|^2)^{-1/2} \nabla h^{i,0} \right] = 0. \quad (10)$$

Граничное условие (6) на границе волокна Γ примет вид

$$\Gamma : \quad (1 + |\nabla h^{i,0}|^2)^{-1/2} \frac{\partial h^{i,0}}{\partial n} = -\cos \gamma. \quad (11)$$

Согласно методу сращивания асимптотических разложений граничное условие (7) в бесконечности, которая не входит в зону действия внутреннего разложения, следует заменить условием сращивания [16,34,35]

$$r \rightarrow \infty : \quad h^{i,0} \cong [h^{o,0}]^i, \quad (12)$$

где $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ и $[h^{o,0}]^i$ – *внутреннее разложение внешнего разложения* при $\varepsilon \rightarrow 0$. Чтобы найти поведение в бесконечности внутреннего разложения, вернемся к оригинальному граничному условию (7) и предположим, что внутреннее и внешнее разложения перекрываются в области, где мениск уже близок к горизонтальной поверхности воздух–жидкость $h = 0$. В этой области все производные $h^{i,0}$ малы и имеет место следующая асимптотическая аппроксимация уравнения (10)

$$r \rightarrow \infty : \quad \Delta h^{i,0} = 0 + O(|\nabla h^{i,0}|^2). \quad (13)$$

Поведение в бесконечности решения уравнения Лапласа (13) в общем виде для задач динамики жидкости может быть представлено комбинацией источника и мультиполей [52]

$$r \rightarrow \infty : \quad h^{i,0}(r, \phi) \approx B_{-1} \ln r + B_0 + \sum_{k=1}^N B_k r^k \cos k\phi, \quad (14)$$

где использованы цилиндрические координаты (r, ϕ) , $\phi = \arctan(y/x)$. Отметим, что задание у решения в бесконечности сингулярного поведения типа (14) не противоречит асимптотическому характеру внутреннего разложения (9), поскольку бесконечность не входит в зону действия этого разложения.

Константы B_k , $k = -1, 0, 1, \dots$ пока не определены и должны находиться из условия сращивания (12). Таким образом, проблема построения внутреннего разложения свелась к решению уравнения (10) с граничным условием на профиле

волокна (11) и условием в бесконечности (14). Перейдем к построению внешнего асимптотического разложению. Отметим важную особенность условия (14) – оно включает и логарифмическую особенность, что обуславливает необходимость тщательного анализа внешнего разложения, как отмечалось в [16].

2.2. Главный член внешнего разложения. Угадать форму внешней переменной можно на уровне физической интуиции. В самом деле, вдали от волокна все возмущения поверхности мениска, вызванные смачиванием фигурного волокна, затухают, и мениск близок к горизонтальной поверхности $h = 0$ с очень малым углом наклона, $|\nabla h| \ll 1$. Следовательно, вдали от волокна управляющее уравнение (5) становится существенно проще: $\Delta h - \varepsilon h = 0$. Как показывает анализ размерностей, первый и второй слагаемые этого уравнения становятся соизмеримы на расстояниях порядка $r \sim \varepsilon^{-1/2}$.

Эти оценки наводят на мысль, что в качестве внешней переменной следует выбрать $\xi = r\sqrt{\varepsilon}$. Соответственно, внешнее асимптотическое разложение решения задачи будем искать в форме

$$Z_\xi : \quad h^o(\xi) = h^{o,0}(\xi) + o(1).$$

где Z_ξ – зона действия внешнего разложения. Последнюю можно определить как $Z_\xi: \xi \geq O(1)$, поскольку условие (7) убывания до нуля функции h на бесконечности, позволяет распространить внешнюю зону с областей, где $\xi \sim O(1)$, до бесконечности.

Перепишем управляющее уравнение (5) в этой зоне в цилиндрических координатах. Проведем замену $\partial h / \partial r = \sqrt{\varepsilon} \partial h / \partial \xi$ и оставим только члены старшего порядка. Будем иметь

$$Z_\xi : \quad \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial h^{o,0}}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 h^{o,0}}{\partial \phi^2} - h^{o,0} = 0. \quad (15)$$

Исчезающее на бесконечности решение этого уравнения может быть представлено в виде ряда Фурье относительно переменной ϕ и функциями Бесселя второго рода $K_n(\xi)$, $n \geq 0$ в качестве спектральных функций [19,20]. У этого ряда, как показано в работе [53], главный член порядка $O(1)$ имеет вид

$$Z_\xi : \quad h^{o,0}(\xi, \phi) = C_0 K_0(\xi), \quad (16)$$

а функции Бесселя второго рода старшего порядка $K_n(\xi)$, $n \geq 1$ дают вклад только в члены разложения порядка $o(1)$. Здесь C_0 – константа.

Внешнее асимптотическое разложение (16) удовлетворяет граничному условию на бесконечности (7). Граничному условию на профиле волокна оно, естественно, не удовлетворяет, поскольку окрестность волокна не входит во внешнюю зону.

Чтобы срастить внешнее разложение (16) с внутренним, используем условие срачивания (12), где внутреннее разложение внешнего разложения $[h^{o,0}]^i$ имеет вид, см. [34,35]

$$[h^{o,0}]^i = C_0 K_0(r\sqrt{\varepsilon})|_{r \sim 1} \approx -C_0 \left[\ln r + \ln \left(\frac{e^E \sqrt{\varepsilon}}{2} \right) \right],$$

где $E = 0.577215$ – константа Эйлера. Фактически это позволяет выразить константы B_k в условии (14) через параметр C_0 . Однако сам параметр C_0 пока не определен.

2.3. Определение параметра C_0 и срачивание внутреннего разложения с внешним. Введем в рассмотрение окружность C_M большого радиуса $r = M > 1$ при том, что $M \sim O(1)$, см. рис. 1b). Для определения параметра

C_0 используем уравнение баланса сил (8). Согласно правой части (8) для интеграла по области Ω справедлива оценка

$$\varepsilon \iint_{\Omega} h d\Omega = O(1). \quad (17)$$

С другой стороны, он может быть оценен непосредственно

$$\varepsilon \iint_{\Omega} h d\Omega = \varepsilon \iint_{\Omega \cap C_M} h d\Omega + \varepsilon \iint_{\Omega \setminus C_M} h d\Omega \cong \varepsilon \iint_{\Omega \cap C_M} h^{i,1} d\Omega + \varepsilon \iint_{\Omega \setminus C_M} h^{o,1} d\Omega. \quad (18)$$

Первый интеграл в правой части последнего соотношения берется по внутренней зоне $\Omega \cap C_M$, ограниченной окружностью C_M , в то время как второй интеграл берется по внешности этой окружности $\Omega \setminus C_M$. Согласно методу сращивания асимптотических разложений [34,35] первый интеграл не требует точного определения границы области интегрирования $r = M$. Эту границу следует выбрать где-то в районе перекрытия внешнего и внутреннего разложения: $M \sim O(1)$ и $M > 1$. Тогда первый интеграл в правой части (18) будет мал

$$\varepsilon \iint_{\Omega \cap C_M} h^{i,1} d\Omega = O(\varepsilon)$$

и может быть отброшен, поскольку в целом левая часть выражения (18) имеет порядок $O(1)$, см. (17).

Второй интеграл в правой части (18) может быть оценен, если, используя теорему Каплуна асимптотического анализа [54,55], распространить зону действия внешнего разложения вплоть до границы C_M , детали см. [53]. Тогда второе слагаемое в соотношении (18) примет вид [49]

$$\varepsilon \iint_{\Omega \setminus C_M} h^{o,1} d\Omega = 2\pi\varepsilon C_0 \int_M^{\infty} K_0(r\sqrt{\varepsilon}) r dr = 2\pi C_0 \int_{\sqrt{\varepsilon}M}^{\infty} K_0(u) u du = 2\pi\sqrt{\varepsilon} C_0 M K_1(M\sqrt{\varepsilon}).$$

Принимая во внимание асимптотическую аппроксимацию модифицированной функции Бесселя второго рода при малых аргументах, $K_1(M\sqrt{\varepsilon}) \cong (M\sqrt{\varepsilon})^{-1}$, будем иметь

$$\varepsilon \iint_{\Omega \setminus C_M} h^o d\Omega \cong 2\pi C_0.$$

Подставляя это значение в условие (8), найдем асимптотическое выражение константы C_0 через контактный угол и периметр волокна

$$C_0 = \frac{l \cos \gamma}{2\pi}. \quad (19)$$

Подставляя выражение (19) для константы C_0 в соотношение (14), получим окончательное выражение граничного условия в бесконечности для внутреннего разложения [49]

$$r \rightarrow \infty : \quad h^{i,0}(r, \phi) \approx -\frac{l \cos \gamma}{2\pi} \left[\ln r + \ln \left(\frac{e^E \sqrt{\varepsilon}}{2} \right) \right]. \quad (20)$$

Таким образом, константы B_{-1} and B_0 в представлении (14) полностью определяются внешним разложением. Остальные константы B_k , $k \geq 1$ не дают никакого вклада в главный член асимптотики [53]. Это важный результат, который не был известен ранее: в асимптотическом анализе Ло [16] для волокна круглого сечения константа C_0 определялась прямым разложением точного решения нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения – одномерного аналога управляющего уравнения (5) без привлечения условия баланса сил (8). Здесь же с привлечением этого условия фактически установлено, что в общем двумерном случае произвольного профиля волокна проблему внутреннего разложения, уже сращенного с внешним, можно решать как отдельную задачу.

2.4. Асимптотическое разложение, равномерно пригодное во всей области Ω . Имея решение внутренней задачи $h^{i,0}$, можно использовать правило Ван Дайка [35,56], чтобы записать главный член асимптотического разложения $h^{u,0}$, равномерно пригодного всюду в области Ω

$$h^{u,0}(r, \phi) = h^{o,0}(r, \phi) + h^{i,0}(r, \phi) - [h^{o,0}]^i.$$

С учетом выражений (16), (19), (20) будем иметь

$$h^{u,0}(r, \phi) = h^{i,0}(r, \phi) + \frac{l \cos \gamma}{2\pi} [K_0(r\sqrt{\varepsilon}) + \ln r + \ln(e^E \sqrt{\varepsilon}/2)]. \quad (21)$$

Таким образом, задача определения формы мениска на тонком волокне произвольной формы переформулирована, как задача нахождения минимальной поверхности (10) со специфическими граничными условиями (11), (20).

Проведенный асимптотический анализ позволяет также понять управляющий механизм формирования внешнего мениска на тонком фигурном волокне. Выявлено, что форма мениска контролируется главным образом силами смачивания, действующими на контактной линии, и поверхностным натяжением в пленке – мениске, силу которого определяет совместное действие капиллярных и гравитационных сил в бесконечности. В отличие от внутренних менисков, формирующихся в полых волокнах и трубах [1], во внешних менисках капиллярное давление не оказывает никакого влияния на высоту капиллярного подъема жидкости.

3. Аналогия с фильтрацией anomalно вязкой жидкости.

Постановка задачи (5) – (7) о капиллярном подъеме жидкости на вертикальном волокне произвольного поперечного сечения в случае малых чисел Бонда $\varepsilon \ll 1$ сведена к асимптотической модели, описываемой уравнением минимальной поверхности (10) и граничными условиями (11), (20). Хотя асимптотическая постановка и остается нелинейной, она все же более проста для анализа. Более того, можно заметить аналогию управляющего уравнения (10) с моделями газовой динамики и фильтрации anomalно вязкой жидкости [36,40-42,57], что позволяет надеяться на эффективность разработанных в этих теориях методов построения точных и приближенных численных решений задач.

Легко видеть, что уравнение минимальной поверхности (10) совпадает с уравнением неразрывности $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ для несжимаемого потока жидкости \mathbf{J} , определенного следующим образом

$$\mathbf{J} = - (1 + |\nabla h^{i,0}|^2)^{-1/2} \nabla h^{i,0}. \quad (22)$$

Этот *фиктивный* поток жидкости определяется перепадом уровня жидкости в мениске и высота мениска может рассматриваться в качестве гидравлического напора. Уравнение (10), означающее фактически несжимаемость потока \mathbf{J} , допускает введение функции тока $\psi(x, y)$

$$J_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad J_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

В теории плоских течений несжимаемой жидкости установлена целесообразность введения плоскости годографа скорости (J_x, J_y) [40,42,52]. Последнюю можно описать и в переменных (θ, J) , где θ – угол наклона вектора \mathbf{J} к оси x , а J – модуль вектора \mathbf{J} :

$$J = |\mathbf{J}| > 0, \quad J_x = J \cos \theta, \quad J_y = J \sin \theta.$$

Из определения (22) следует связь между величиной потока \mathbf{J} и высотой мениска $h^{i,0}$ в каждой точке физической плоскости

$$\Omega: \quad J = (1 + |\nabla h^{i,0}|^2)^{-1/2} |\nabla h^{i,0}|, \quad 0 \leq J \leq 1. \quad (23)$$

Это соотношение можно переписать иначе, разрешив его относительно $|\nabla h^{i,0}|$

$$|\nabla h^{i,0}| = \Phi(J), \quad \Phi(J) = (1 - J^2)^{-1/2} J, \quad \Phi(J) \geq 0, \quad \Phi'(J) \geq 0. \quad (24)$$

В результате можно переформулировать задачу капиллярного подъема жидкости на волокне как задачу фильтрации аномально вязкой жидкости [36,40-42,57]

$$\Omega: \quad \nabla h^{i,0} = -\Phi(J) \frac{\mathbf{J}}{J}, \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (25)$$

Математическая постановка задачи замыкается следующим граничным условием на профиле волокна Γ

$$\Gamma: \quad \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = \cos \gamma, \quad (26)$$

и условием в бесконечности для напора или его градиента

$$r \rightarrow \infty: \quad h^{i,0} = -\frac{Q}{2\pi} [\ln r + \ln(e^E \sqrt{\varepsilon}/2)] + O(r^{-1}), \quad (27)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \nabla h^{i,0} = -\frac{Q}{2\pi r^2} \mathbf{r} + O(r^{-2}). \quad (28)$$

Здесь \mathbf{r} – радиус-вектор точки (x, y) физической плоскости, а Q – суммарный расход фильтрующейся жидкости $Q = l \cos \gamma$.

Сравнивая условия Юнга–Лапласа в виде (3), (26) и учитывая определение вектора потока \mathbf{J} , приходим к выводу, что вектор \mathbf{J} является направленной проекцией вектора нормали \mathbf{N} к мениску на физическую плоскость (x, y) .

3.1. Преобразование к переменным годографа. Следуя С.А. Чаплыгину и С.Ф. Христиановичу [36,57], перепишем систему уравнений (25) в терминах гидравлического напора $h^{i,0}(J, \theta)$ и функции тока $\psi(J, \theta)$

$$\frac{\Phi^2(J)}{J\Phi'(J)} \frac{\partial \psi}{\partial J} = -\frac{\partial h}{\partial \theta}, \quad \frac{\Phi(J)}{J^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial h}{\partial J}. \quad (29)$$

Используя явное выражение (24) для функции Φ , найдем

$$\Phi'(J) = \frac{1}{(1-J^2)^{3/2}}, \quad \frac{\Phi^2(J)}{J\Phi'(J)} = J(1-J^2)^{1/2}, \quad \frac{\Phi(J)}{J^2} = \frac{1}{J(1-J^2)^{1/2}}.$$

Подставляя эти выражения в систему уравнений (29), получим

$$J(1-J^2)^{1/2} \frac{\partial \psi}{\partial J} = -\frac{\partial h}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = J(1-J^2)^{1/2} \frac{\partial h}{\partial J}. \quad (30)$$

В.В. Соколовский заметил, что введением новой переменной t [58]

$$t = \ln \frac{1 + \sqrt{1-J^2}}{J} \equiv \operatorname{arccosh} \frac{1}{J}. \quad (31)$$

систему уравнений (30) можно преобразовать в систему уравнений Коши – Римана [59]

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial h^{i,0}}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -\frac{\partial h^{i,0}}{\partial t}. \quad (32)$$

В результате уравнение минимальной поверхности (10) преобразовано к уравнению Лапласа в плоскости годографа скорости t, θ (условно причислим t к переменным годографа, поскольку t связано с J взаимно однозначным соответствием)

$$\frac{\partial^2 h^{i,0}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 h^{i,0}}{\partial \theta^2} = 0. \quad (33)$$

Тогда можно ввести комплексные переменные W и χ

$$W = -h^{i,0} + i\psi, \quad \chi = t + i\theta, \quad (34)$$

Соответственно, для построения решений задачи внутреннего асимптотического разложения (10), (11), (20) для волокна со сложным профилем поперечного сечения можно использовать методы теории функции комплексного переменного [59].

4. Примеры точного решения задачи внутреннего асимптотического разложения

Для решения задачи (10), (11), (20) необходимо определить функцию $\chi = \chi(W)$, реализующей конформное отображение плоскости переменного $\chi = t + i\theta$ на плоскость переменного $W = -h^{i,0} + i\psi$. После этого остается только восстановить функцию $h^{i,0}(x, y)$. С.А. Христиановичем и Ф. Энгелундом [40-42, 57] было получено дифференциальное соотношение, связывающее физическую плоскость $z = x + iy$ с плоскостью W

$$dx = -\frac{\cos \theta}{\Phi(J)} dh^{i,0} - \frac{\sin \theta}{J} d\psi, \quad dy = -\frac{\sin \theta}{\Phi(J)} dh^{i,0} + \frac{\cos \theta}{J} d\psi.$$

С учетом выражений (24), (31), это соотношение можно переписать в терминах (θ, t) :

$$dx = -\cos \theta \sinh t dh^{i,0} - \sin \theta \cosh t d\psi, \quad dy = -\sin \theta \sinh t dh^{i,0} + \cos \theta \cosh t d\psi. \quad (35)$$

Известная зависимость $\chi = \chi(W)$, т.е. фактически известный вид функций $t = t(h^{i,0}, \psi)$, $\theta = \theta(h^{i,0}, \psi)$, позволяет проинтегрировать соотношение (35) вдоль

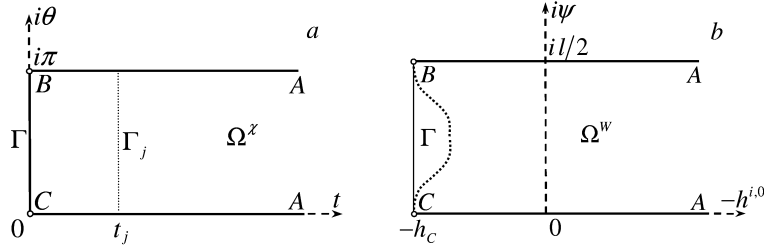


Рис. 2. а) Плоскость годографа для волокна с произвольным профилем поперечного сечения в случае полного смачивания $\gamma = 0$ и наличия симметрии относительно оси x .

б) Полуполоса $ABCA$ в плоскости W , отвечающая мениску на волокне круглого сечения. Если профиль волокна отличается от кругового, прямолинейный отрезок BC деформируется в кривую линию BC (пунктирная линия)

любой линии плоскости W . В частности можно в параметрической форме $x = x(\psi, h^{i,0})$, $y = y(\psi, h^{i,0})$ найти уравнение любой линии уровня $h^{i,0} = \text{const}$.

Плоскость годографа. В случае полного смачивания волокна ($\gamma = 0$) из условия (26) следует, что на границе Γ : $J = 1$ и вектор потока \mathbf{J} направлен по нормали к границе Γ . Принимая во внимание формулу (31), будем иметь

$$\Gamma: \quad t = 0. \quad (36)$$

На участке границы CA угол θ равен нулю, $\theta = 0$, а на участке BA имеем $\theta = \pi$, см. рис. 1 б). На границе волокна угол θ меняется от 0 до π по мере продвижения от точки C к точке B . В окрестности точки $A \in AC$ уровень жидкости $h^{i,0}$ и ее градиент удовлетворяют условиям (3.6а), (3.6б), в которых следует взять $\gamma = 0$:

$$y = 0, \quad x \rightarrow \infty: \quad h^{i,0}(x, y) = -\frac{l}{2\pi} \ln \left(\frac{xe^E \sqrt{\varepsilon}}{2} \right) + O(x^{-1}), \quad (37)$$

$$y = 0, \quad x \rightarrow \infty: \quad |\nabla h^{i,0}| = \frac{l}{2\pi x} + O(x^{-2}). \quad (38)$$

Таким образом, в точке A имеем $|\nabla h^{i,0}| \rightarrow 0$ и, согласно формулам (23), (31), $J \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$. Суммируя вышесказанное относительно поведения переменных θ и t на границах области $ABCA$ в физической плоскости (верхняя половина области Ω), см. рис. 1 б), можно прийти к выводу, что области $ABCA$ в плоскости годографа χ отвечает полуполоса, изображенная на рис. 2 а).

Подчеркнем, что в случае полного смачивания $\gamma = 0$ годограф имеет такой вид – полуполосы – для *произвольного* профиля волокна. Единственное ограничение, которое здесь было введено, это наличие симметрии профиля относительно оси x .

Далее необходимо задаться конкретным профилем волокна и решить задачу для комплексного потенциала W . В случае кругового профиля волокна высота контактной линии постоянна, а границам CA и BA отвечают линии тока ($\psi = \text{const}$) фиктивного потока \mathbf{J} . Следовательно области $ABCA$ в плоскости годографа W будет отвечать полуполоса, изображенная на рис. 2 б). В общем случае, когда профиль волокна отличен от кругового, высота контактной линии, вообще говоря, непостоянна и должна быть найдена, как часть решения задачи. В то же время границы CA и BA остаются линиями тока. Следовательно, функция $h^{i,0}(t, \theta)$, как решение уравнения Лапласа (33), в плоскости χ может быть представлена в виде ряда Фурье, спектральные функции которого определяются граничными условиями на участках CA и BA . Ограничиваясь первыми несколькими членами этого

ряда, можно получить некоторые точные решения задачи. Таким образом, предлагается полубратный метод конструирования нетривиальных точных решений: будем задаваться *частным видом функции* $W(\chi)$ из определенного набора функций и затем восстанавливать соответствующие этому виду форму мениска и форму профиля волокна.

Точное решение для волокна с овальным профилем поперечного сечения. Эффективность такого метода проиллюстрируем использованием для функции $W(\chi)$ обрезанного ряда Фурье следующего вида

$$W(\chi) = -h_0 + \frac{l}{2\pi}\chi + a(e^{-2\chi} - 1), \quad (39)$$

параметризованного введением констант a и h_0 . Когда $a \equiv 0$, отображение $\Omega^X \rightarrow \Omega^W$ переводит полуполосу Ω^X плоскости χ в полуполосу Ω_0^W шириной $l/2$ плоскости W , что отвечает случаю кругового профиля волокна. Введение последнего слагаемого в формулу (39) деформирует границу BC полуполосы в плоскости W , как схематически представлено на рис. 2b).

Удобно ввести сетку линий $t = t_j$, $j = 1, \dots, N$ в плоскости χ

$$\Gamma_j : \quad \chi = t_j + i\theta, \quad \theta \in [0, \pi]. \quad (40)$$

Образы этих линий в физической плоскости

$$x = x_j(\theta), \quad y = y_j(\theta), \quad z = h_j(\theta) \quad (41)$$

можно взять в качестве *образующих* поверхность мениска $h^{i,0}(x, y)$. Вид функций $h_j(\theta)$ найдем выделением в выражении (39) вещественной части функции W

$$h_j(\theta) = h_0 - \frac{l}{2\pi}t_j - a(e^{-2t_j} \cos 2\theta - 1). \quad (42)$$

а вид функций $x_j(\theta)$, $y_j(\theta)$ – интегрированием дифференциальных соотношений (35)

$$\begin{aligned} x_j(\theta) &= \frac{l}{2\pi} \cosh t_j \cos \theta + a \left(e^{-t_j} \cos \theta - \frac{e^{-3t_j}}{3} \cos 3\theta \right), \\ y_j(\theta) &= \frac{l}{2\pi} \cosh t_j \sin \theta - a \left(e^{-t_j} \sin \theta + \frac{e^{-3t_j}}{3} \sin 3\theta \right). \end{aligned} \quad (43)$$

Форма профиля волокна и контактной линии. Полагая $t_j = 0$ в выражениях (43), можно найти форму профиля волокна Γ в физической плоскости

$$x_\Gamma(\theta) = \left(\frac{l}{2\pi} + a \right) \cos \theta - \frac{a}{3} \cos 3\theta, \quad y_\Gamma(\theta) = \left(\frac{l}{2\pi} - a \right) \sin \theta - \frac{a}{3} \sin 3\theta. \quad (44)$$

Дополняя эти формулы выражением (42) при $t_j = 0$ можно получить уравнение контактной линии Γ_c

$$h_\Gamma(\theta) = h_0 - a(\cos 2\theta - 1) \quad (45)$$

Параметр h_0 , непосредственно определяющий высоту мениска в точке C , пока еще не определен. Чтобы найти его, воспользуемся формулой (39) представления функции $W(\chi)$, в которой примем $\chi = t \rightarrow +\infty$

$$\chi = t \rightarrow +\infty : \quad h^{i,0} = - \left(\frac{l}{2\pi} \right) t + (h_0 + a) - ae^{-2t}. \quad (46)$$

С другой стороны из формул (24), (31) при $t \rightarrow +\infty$ вытекает соотношение $|\nabla h^{i,0}| \approx J = 1/\sinh t$. Подставляя его в формулу (4.2b), получим еще одну форму записи граничного условия вблизи точки $A \in AC$

$$y = 0, \quad x \rightarrow \infty : \quad \sinh t \approx \frac{2\pi x}{l} + O(1). \quad (47)$$

Разрешая его, как уравнение относительно x , получим асимптотическую оценку поведения функции $x(t, \theta)$ вблизи точки $A \in AC$

$$\chi = t \rightarrow +\infty : \quad x = \frac{l}{4\pi} e^t + O(1),$$

Подстановка ее в условие (4.2a) дает

$$\chi = t \rightarrow +\infty : \quad h^{i,0} = -\left(\frac{l}{2\pi}\right) t - \frac{l}{2\pi} \ln\left(\frac{le^E \sqrt{\varepsilon}}{8\pi}\right) + O(e^{-t}). \quad (48)$$

Сравнивая выражения (46) и (48), легко установить величину параметра h_0

$$h_0 = \frac{l}{2\pi} \ln\left(\frac{8\pi}{le^E \sqrt{\varepsilon}}\right) - a. \quad (49)$$

Связь между вспомогательными и физическими параметрами задачи. Параметрические уравнения профиля волокна и контактной линии (44), (45) зависят от двух вспомогательных параметра a и l . Поскольку в качестве характерного размера области была выбрана величина $L_m = \sqrt{A/\pi}$, см. введение, безразмерная площадь поперечного сечения волокна должна быть равна π . Следовательно, имеет место соотношение

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\pi y_\Gamma(\theta) \left(-\frac{dx_\Gamma}{d\theta}\right) d\theta.$$

Вычисляя интеграл в его правой части, получим соотношение, связывающее параметры a и l

$$\frac{l^2}{4\pi^2} - 1 = \frac{2}{3}a^2 \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm \sqrt{\frac{3}{2} \left(\frac{l^2}{4\pi^2} - 1\right)}. \quad (50)$$

Из геометрических свойств круга следует ограничение на периметр профиля волокна, имеющего площадь π : его периметр l не может быть меньше периметра единичного круга

$$l \geq 2\pi. \quad (51)$$

В частности, для единичного круга имеет место равенство $l = 2\pi$, из которого при учете соотношения (50) следует, что $a = 0$.

Анализ выражения (39) с учетом (50) показывает, что отображение $W(\chi)$ остается конформным в области Ω^χ только в случае выполнения ограничения

$$|a| \leq a_* = \frac{l}{4\pi}. \quad (52)$$

В случае достижения границ неравенства (52), $a = \pm a_*$, на границе Γ области Ω^χ возникают сингулярности

$$\Gamma : \quad \left. \frac{dW}{d\chi} \right|_{\theta=0, \pi} = 0 \quad a = a_*; \quad \Gamma : \quad \left. \frac{dW}{d\chi} \right|_{\theta=\pi/2} = 0 \quad a = -a_*.$$

но отображение $W(\chi)$ еще остается конформным внутри области Ω^χ .

Когда модуль $|a|$ превышает величину a_* , функция $W(\chi)$ становится неоднолистной. Соответственно, мениску будет отвечать поверхность с точками саморесечения, что лишено физического смысла. Поскольку параметры a и l связаны соотношением (50), неравенства (52) и (51) приводят к таким ограничениям на l :

$$2\pi \leq l \leq l_* = 2\pi\sqrt{6/5}.$$

Тем самым установлен интервал допустимых значений периметра l для множества профилей волокна, отвечающих параметризованному виду функции $W(\chi)$ (39).

Наконец, имея параметрические уравнения (42), (43) мениска $h^{i,0}(x, y)$, отвечающего внутреннему асимптотическому разложению, и используя формулу (21), можно восстановить мениск $h^{u,0}(x, y)$, отвечающий асимптотическому разложению, равномерно приближающему решение задачи (5) – (7) во всей физической плоскости

$$h_j^{u,0}(\theta) = \frac{l}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{4\pi}{l} \right) - t_j + K_0(r_j(\theta)\sqrt{\varepsilon}) + \ln r_j(\theta) \right] - a(e^{-2t_j} \cos 2\theta - 1),$$

где $r_j(\theta) = [x_j^2(\theta) + y_j^2(\theta)]^{1/2}$.

Конкретные примеры. Рассмотрим два представительных примера менисков, формирующихся на волокнах с овальным профилем поперечного сечения, который отвечает выражению (44) при $l = 6.5$, рис. 3, и $l = l_* \approx 6.8829$, рис. 4. В первом случае $l < l_*$ и кривизна профиля волокна всюду конечна, во втором случае $l = l_*$ и кривизна профиля обращается в бесконечность в точках B и C .

Эти два примера демонстрируют существенно различное поведение контактной линии на гладких профилях волокна. Когда кривизна профиля волокна в точках C и B конечна, контактная линия остается всюду гладкой. Когда кривизна в этих точках обращается в бесконечность, на контактной линии формируется особенность типа точки возврата. Таким образом, сингулярности контактной линии могут образоваться не только на точках излома профиля волокна, но и на гладком профиле волокна, если последний имеет точки с бесконечной кривизной.

5. Заключение. Во многих практических случаях характер взаимодействия между волокном и жидкостью изучается по форме контактной линии и мениска в целом, причем профили волокна могут быть самыми разнообразными. Точные аналитические решения имеются только для волокна плоской и цилиндрической формы. Несмотря на развитие за последние годы численных методов решения задачи, критерии формирования сингулярности на контактных линиях менисков, формирующихся вокруг тонких волокон со сложным профилем поперечного сечения остаются неизвестными и активно обсуждаются в литературе.

В данной работе сформулирована асимптотическая постановка задачи капиллярного подъема жидкости на тонком волокне, когда гравитационные силы, действующие на жидкость, оказываются малы по сравнению с капиллярными силами, играющими основную роль в формировании мениска. С использованием метода сращивания асимптотических разложений эта нелинейная задача сведена к задаче определения минимальной поверхности (10) со специфическими граничными условиями (11), (20).

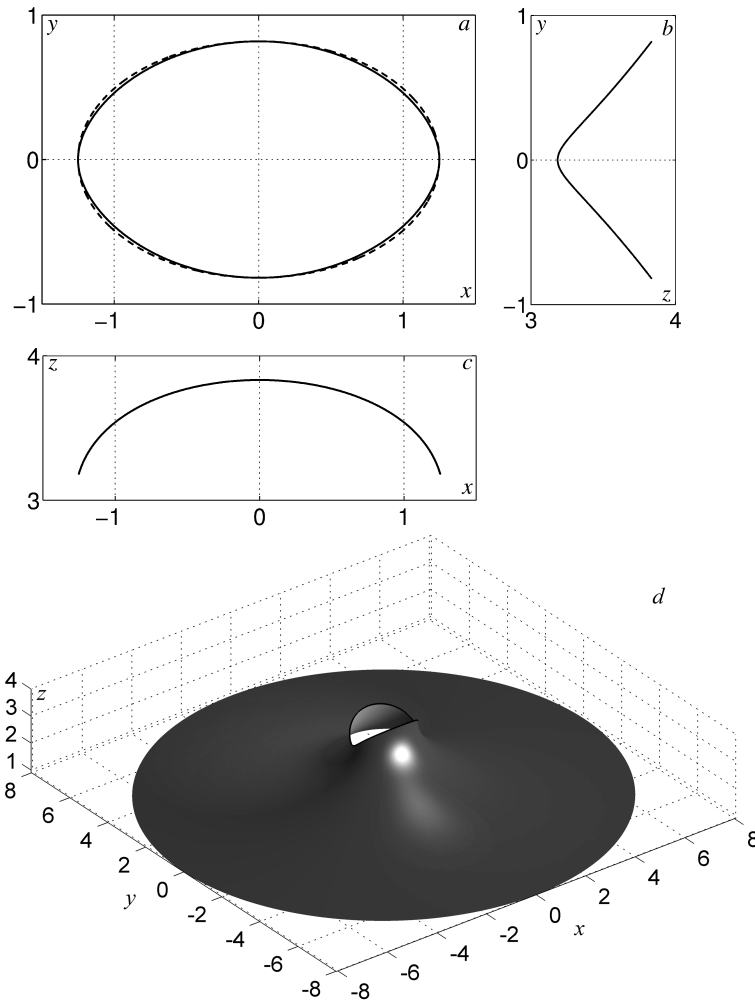


Рис. 3. *a*) Профиль волокна, отвечающий выражениям (44) при $l = 6.5$, число Бонда $\varepsilon = 0.01$. Профиль близок к эллипсу $x^2/\alpha^2 + y^2/\beta^2 = 1$ с полуосями $\alpha = 1.2508$ и $\beta = 0.8182$, см. штриховую линию; *b*) (z, y) -профиль контактной линии; *c*) (x, z) -профиль контактной линии; *d*) 3D форма мениска $h^{u,0}(x, y)$. Волокно не нарисовано

Предложенная постановка позволяет интерпретировать задачу определения минимальной поверхности как проблему фильтрации anomalно вязкой жидкости в пористой среде. Эффективным оказывается преобразование Чаплыгина к переменным годографа скорости. Такой подход позволяет подключить мощный арсенал методов динамики жидкости к решению задач капиллярного подъема жидкости на тонких волокнах. В частности, используя метод годографа скорости, построено точное решение задачи в асимптотической постановке в случае полного смачивания жидкостью материала волокна и овального профиля поперечного сечения волокна (44). Показано, что форма контактной линии очень чувствительна к изменениям формы профиля волокна и сингулярности контактной линии могут возникнуть даже на таком гладком овальном профиле.

Работа поддержана грантами Российского Фонда Фундаментальных Исследований, № 12-01-00996 и 13-01-00368 (М.М.А.) и National Science Foundation, № PoLS

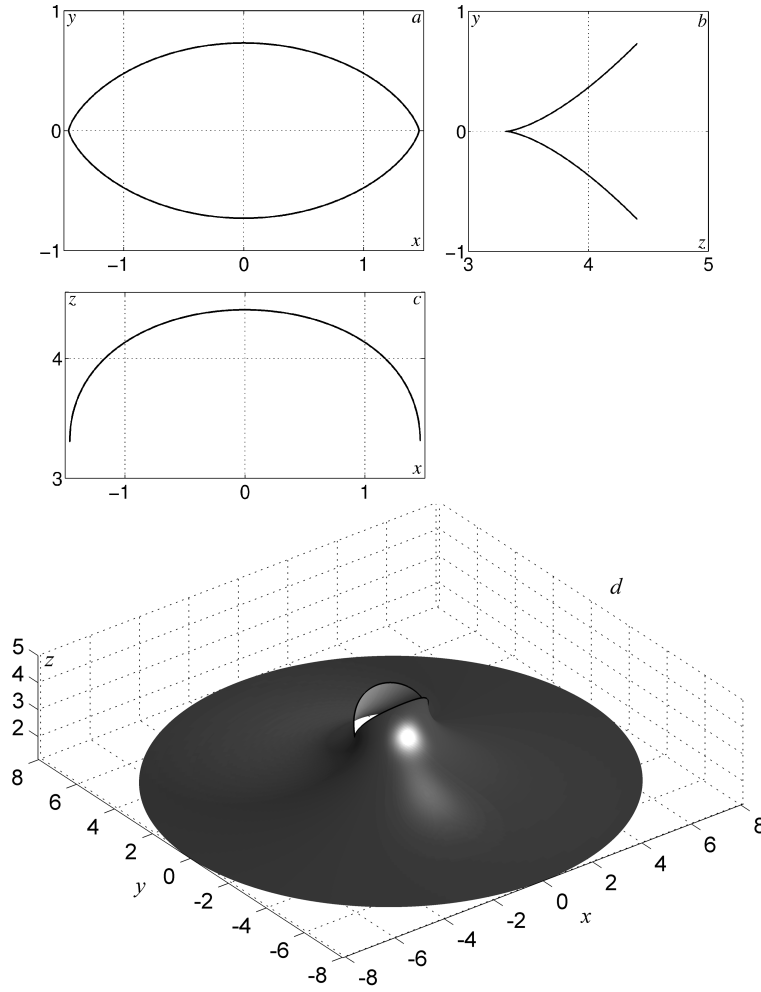


Рис. 4. *a*) Профиль волокна, отвечающий выражениям (44) при $l = l_*$, число Бонда $\varepsilon = 0.01$; *b*) (z, y) - профиль контактной линии; *c*) (x, z) - профиль контактной линии; *d*) 3D форма мениска $h^{u,0}(x, y)$. Волокно не нарисовано

1305338 (К.Г.К.).

Summary

M.M. Alimov, K.G. Kornev **Asymptotic analysis of the capillary rise of a meniscus on the thin fiber with complex shaped profile**

Using the method of matched asymptotic expansions, the problem of the capillary rise of a meniscus on the thin fiber with complex shaped profile was reduced to a nonlinear problem of determination of a minimal surface. This surface has to satisfy a special boundary condition at infinity. The proposed formulation allows one to interpret the meniscus problem as a problem of flow of a fictitious non-Newtonian fluid through a porous medium. As an example, the shape of a meniscus on a fiber of an oval cross-section was analyzed employing Chaplygin's hodograph transformation. It was discovered that the contact line may form singularities even if the fiber has a smooth profile: this statement was illustrated with an oval fiber profile having infinite curvature at two end points.

It is well known that free boundary problem for the bubble steady motion in a Hele-Shaw cell is nonregular in the limit of zero surface tension. Trough this nonregularity a degeneracy

of the solution appear: for a given area of the bubble P.G. Saffman and G.I. Taylor found a family of exact solutions. S. Tanweer showed that the solution degeneracy removed by the effect of surface tension but he gave no clear explanation for it's reasons. In addition S. Tanweer found several branches of the bubble solution. In order to find all solution branches we define a modified Hele-Shaw problem similarly to J.-M. Vanden-Broeck's approach to the problem for finger steady motion. Numerical solution of this modified problem was found. The unique solution was obtained for a given area of the bubble. This solution coincide with main branch of S. Tanweer solution. No other solution branches was found. Explanation for this disagreement is that S. Tanweer found solutions which might include the nonunivalent physical plane while we find only univalent solutions. In addition we give clear explanation for reasons of the degeneracy removal when surface tension is introduced. In the physical plane the flow domain has two characteristic points at infinity on the left and at infinity on the right where domain width value is assigned. Both these values have to define by single integration of the main boundary equation. Taking into account one constant of integration two conditions can not be satisfied because the bubble contour shape has no fore and aft symmetry. Thus a solvability condition appear.

Key words: capillary rise, minimal surfaces, matched asymptotic, hodograph transformation, complex variables.

Литература

1. *Jurin J.* An Account of Some Experiments Shown before the Royal Society; With an Enquiry into the Cause of the Ascent and Suspension of Water in Capillary Tubes // *Phil. Trans. R. Soc.* – 1717. – V. 30. – P. 739 – 747.
2. *Laplace P.S.* *Mecanique Celeste.* – New York, NY: Chelsea Publishing Company, 1966.
3. *Maxwell J.C.* Capillary action. *Encyclopaedia Britannica.* 1875.
4. *Pujado P.R., Scriven L.E., Huh C.* Attribution of an equation of capillarity to Young and Laplace // *J. Colloid Interface Sci.* – 1972. V. 38. – P. 662 – 663.
5. *Adamson A.W., Gast A.P.* *Physical chemistry of surfaces.* – New York, NY: Wiley, 1997.
6. *Miller B.* The wetting of fibers. In: *Surface characteristics of fibers and textiles* (ed. Schick M.J.). – New York, NY: Marcel Dekker, 1977. P. 417 – 445.
7. *Miller B., Penn L.S., Hedvat S.* Wetting force measurements on single fibers // *Colloids Surf.* – 1983. – V. 6. P. 49 – 61.
8. *Miller B., Young R.A.* Methodology for studying wettability of filaments // *Textile Res. J.* – 1975. – V. 45. P. 359 – 365.
9. *White D.A., Tallmadge J.A.* Static menisci on outside of cylinders // *J. Fluid Mech.* – 1965. – V. 23. – P. 325 – 335.
10. *Kamath Y.K., Dansizer C.J., Hornby S., Weigmann H.D.* Surface wettability scanning of long filaments by a liquid membrane method // *Textile Res. J.* – 1987. – V. 57. – P. 205 – 213.
11. *Lingstrom R., Wagberg L., Larsson P.T.* Formation of polyelectrolyte multilayers on fibres: Influence on wettability and fibre/fibre interaction // *J. Colloid Interface Sci.* – 2006. – V. 296. – P. 396 – 408.
12. *Xiao H., Yu W.D., Shi M.W.* Evaluation of fiber wettability based on an immersing force measurement // *J. Appl. Polym. Sci.* – 2006. – V. 100. – P. 2659 – 2666.
13. *Zhu S.Q., Hirt D.E.* Improving the wettability of deep-groove polypropylene fibers by photografting. // *Textile Res. J.* – 2009. – V. 79. – P. 534 – 547.
14. *James D.F.* The meniscus on the outside of a small circular cylinder // *J. Fluid Mech.* – 1974. – V. 63. – P. 657 – 664.

15. *Langbein D.W.* Capillary surfaces: shape - stability - dynamics, in particular under weightlessness. – New York, NY: Springer, 2002.
16. *Lo L.L.* The meniscus on a needle - a lesson in matching // *J. Fluid Mech.* – 1973. – V. 132. – P. 65 – 78.
17. *Quere D., di Meglio J.M.* The meniscus on a fiber // *Adv. Colloid Interface Sci.* – 1994. – V. 48. – P. 141 – 150.
18. *Duprat C., Protiere S., Beebe A.Y., Stone H.A.* Wetting of flexible fibre arrays // *Nature.* – 2012. – V. 482. – P. 510 – 513.
19. *Orr F.M., Brown R.A., Scriven L.E.* 3-Dimensional menisci - numerical-simulation by finite-elements // *J. Colloid Interface Sci.* – 1977. – V. 60. – P. 137 – 147.
20. *Pozrikidis C.* Computation of three-dimensional hydrostatic menisci // *IMA J. Appl. Math.* – 2010. – V. 75. – P. 418 – 438.
21. *Princen H.M.* Capillary phenomena in assemblies of parallel cylinders: III. Liquid columns between horizontal parallel cylinders // *J. Colloid Interface Sci.* – 1970. – V. 34. – P. 171 – 184.
22. *Takahashi K.M.* Meniscus shapes on small diameter fibers // *J. Colloid Interface Sci.* – 1990. – V. 134. – P. 181 – 187.
23. *Haile W.A., Phillips B.M.* Deep grooved polyester fiber for wet lay applications // *Tappi J.* – 1995. – V. 78. – P. 139 – 142.
24. *Koc S.K., Duzyer S., Berger R., Hockenberger A.S.* Effect of cross-sectional shape on the behaviour of cationic dyeable poly(ethylene terephthalate) fibres // *Textile Res. J.* – 2012. – V. 82. – P. 1355 – 1362.
25. *Kornev K.G., Callegari G., Kuppler J., Ruetsch S., Neimark A.V.* Ribbon-to-fiber transformation in the process of spinning of carbon-nanotube dispersion // *Phys. Rev. Lett.* – 2006. – V. 97. – P. 188303.
26. *Nelson D.M., Stanelle R.D., Brown P., Marcus R.K.* Capillary-channeled polymer (C-CP) fibers: A novel platform for liquid-phase separations // *Am. Lab.* – 2005. – V. 37. – P. 28.
27. *Rubin B.* Tailored fiber cross sections // *Adv. Mater.* – 1998. – V. 10. – P. 1225 – 1227.
28. *Seeber M., Zdyrko B., Burtovyy R., Andrukh T., Tsai C., Owens J.R., Kornev K.G., Luzinov I.* Surface grafting of thermoresponsive microgel nanoparticles // *Soft Matter.* – 2011. – V. 7. – P. 9962 – 9971.
29. *Tsai C-C, Mikes P., Andrukh T., White E., Monaenkova D., Burtovyy O., Burtovyy R., Rubin B., Lukas D., Luzinov I., Owens J., Kornev K.G.* Nanoporous artificial proboscis for probing minute amount of liquids // *Nanoscale.* – 2011. – V. 3. – P. 4685 – 4695.
30. *Wada O.* Control of fiber form and yarn and fabric structure // *J. Textile Inst.* – 1992. – V. 83. – P. 322 – 347.
31. *Choi W., Tuteja A., Mabry J.M., Cohen R.E., McKinley G.H.* A modified Cassie–Baxter relationship to explain contact angle hysteresis and anisotropy on non-wetting textured surfaces // *J. Colloid Interface Sci.* – 2009. – V. 339. – P. 208 – 216.
32. *Concus P., Finn R.* On behavior of a capillary surface in a wedge // *Proc. Natl Acad. Sci. USA.* – 1969. – V. 63. – P. 292 – 299.
33. *Tuteja A., Choi W., Mabry J.M., McKinley G.H., Cohen R.E.* Robust omniphobic surfaces // *Proc. Natl Acad. Sci. USA.* – 2008. – V. 105. – P. 18200 – 18205.
34. *Bender C.M., Orszag S.A.* Advanced mathematical methods for scientists and engineers: asymptotic methods and perturbation theory. – New York, NY: Springer, 1999.

35. *Найфе А.* Введение в методы возмущений. – М.: Мир, 1984. – 535 с. = *Nayfeh A.H.* Introduction to perturbation techniques. – New York, NY: Wiley, 1981.
36. *Чаплыгин С.А.* О газовых струях. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. – 160 с.
37. *Domokos G., Gibbons G.W.* Spacetime Interpretation of Torsion in Prismatic Bodies // *J. Elast.* – 2013. – V. 110. – P. 111 – 116.
38. *Ferraro R.* Born-infeld electrostatics in the complex plane // *J. High Energy Phys.* – 2010. – V. 1012. – P. 028.
39. *Мизес Р.* Математическая теория течений сжимаемой жидкости. – М.: Изд-во ИЛ, 1961. – 588 с. = *Von Mises R.* Mathematical theory of compressible fluid flow. – New York, NY: Dover, 2004.
40. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. – М.: Недра, 1984. – 208 с.
41. *Engelund F.* On the laminar and turbulent flows of ground water through homogeneous sand // *Trans. Dan. Acad. Tech. Sci.* – 1953. – V. 3. – P. 1 – 105.
42. *Гольдштейн Р.В., Ентов В.М.* Качественные методы в механике сплошных сред. – М.: Наука, 1989. – 224 с.
43. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
44. *Финн Р.* Равновесные капиллярные поверхности. Математическая теория. – М.: Мир, 1989. – 310с. = *Finn R.* Equilibrium capillary surfaces. – New York, NY: Springer-Verlag, 1986.
45. *Young T.* An Essay on the Cohesion of Fluids // *Phil. Trans. R. Soc.* – 1805. – V. 95. – P. 65 – 87.
46. *Oprea J.* Differential geometry and its applications, 2nd edn. – Washington, DC: The Mathematical Association of America, 2007.
47. *Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Элементы дифференциальной геометрии и топологии. – М.: Наука, 1987. – 432 с.
48. *Krenn H.W., Plant J.D., Szucsich N.U.* Mouthparts of flower-visiting insects // *Arthropod Struct. Dev.* – 2005. – V. 34. – P. 1 – 40.
49. *Lehnert M.S., Monaenkova D., Andrukh T., Beard C.E., Adler P.H., Kornev K.G.* Hydrophobic–hydrophilic dichotomy of the butterfly proboscis // *J. R. Soc. Interface.* – 2013. – V. 10. – P. 20130336.
50. *Monaenkova D., Lehnert M.S., Andrukh T., Beard C.E., Rubin B., Tokarev A., Lee W.K., Adler P.H., Kornev K.G.* Butterfly proboscis: combining a drinking straw with a nanosponge facilitated diversification of feeding habits // *J. R. Soc. Interface.* – 2012. – V. 9. – P. 720 – 726.
51. *Keller J.B.* Surface tension force on a partly submerged body // *Phys. Fluids.* – 1998. – V. 10. – P. 3009 – 3010.
52. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. – М.: Мир, 1973. – 760 с. = *Batchelor G.K.* An Introduction to Fluid Dynamics. – Cambridge: Univ. Press, 1970.
53. *Alimov M.M., Kornev K.G.* Meniscus on a shaped fibre: singularities and hodograph formulation // *Proc. R. Soc. A.* – 2014. – V. 470. – P. 20140113.
54. *Kaplun S.* Low Reynolds number flow past a circular cylinder // *Indiana Univ. Math. J.* – 1957. – V. 6. – P. 595 – 603.

- 55. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. – М.: Мир, 1972. – 274 с. = *Cole J.D.* Perturbation methods in applied mathematics. – London: Blaisdell Publishing Company, 1968.
- 56. *Van Dyke M.* Perturbation Methods in Fluid Mechanics. – Boston, MA: Academic Press, 1964.
- 57. *Христианович С.А.* Движение подземных вод, не следующее закону Дарси // ПММ. – 1940. – Т. 4, № 1. – С. 33 – 52.
- 58. *Соколовский В.В.* О нелинейной фильтрации грунтовых вод // ПММ. – 1949. – Т. 13, № 5. – С. 525 – 536.
- 59. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с.

Поступила в редакцию
??..??..??

Алимов Марс Мясумович – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник НИЦ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева Казанского (Приволжского) федерального университета. E-mail: *Mars.Alimov@ksu.ru*

Корнев Константин Германович – Associate Professor Department of Materials Science & Engineering, Clemson University, Clemson, SC